

Feynmanov lietajúci tanier

Boris Gažovič
bgazovic@post.sk

Alexander Tomori
tomal@centrum.sk

konzultant: RNDr. Slavomír Tuleja
tuleja@stonline.sk

Dostupné na
<http://www.vscience.host.sk/materialy/feynmanPlate/>

© 2004 Slavomír Tuleja

Verzia z 29. februára 2004

Obsah

1	Úvod	1
2	Pozorovanie pohybu vyhodeneho taniera	5
2.1	Experiment	5
2.2	Analýza videozáznamu	6
3	Teoretický popis lietajúceho taniera	9
3.1	Z čoho vychádzame?	9
3.2	Dynamika rotujúceho taniera	11
3.2.1	Popis v sústave tuhého telesa	11
3.2.2	Popis v sústave laboratória	13
3.2.3	Čo platí pre malé kolísanie taniera?	15
4	Jednoduchší spôsob	17
4.1	Počítačový model taniera	17
4.2	Čo nám počítačový model taniera prezradil?	18
4.3	Prečo kružnice?	19
4.3.1	Zjednodušenie – elementárny tanier	19
4.3.2	Plán útoku	21
4.3.3	Rovnováha zrýchlení	21
4.3.4	Rozklad zrýchlení na radiálne a tangenciálne zložky	22
4.3.5	Smery a veľkosti tangenciálnych zrýchlení	23
4.3.6	Elementárny tanier je <i>tuhé</i> teleso!	23
4.3.7	Vzťah pre veľkosť tangenciálnych zrýchlení	25
4.3.8	Dôsledky pre malé kolísanie taniera	25
4.3.9	Od elementárneho k skutočnému tanieru	26
5	Záver	29
6	Dodatky	31
6.1	Úryvok	31
6.2	Odvodenie vzťahu medzi \mathbf{L} a $\boldsymbol{\omega}$	33
6.3	Eulerove rovnice	35
6.4	Eulerove uhly	36

6.5 Pohybové rovnice taniera	36
Literatúra	38

Kapitola 1

Úvod

Potom ma napadlo ešte niečo: Z fyziky mi je teraz trochu nanič, ale kedysi som z nej mával *radosť*. Prečo? Pretože som sa s ňou *pohrával*. Robieval som hocičo, na čo som mal práve chuť, netrápilo ma, či to má nejaký význam pre rozvoj jadrovej fyziky, ale či to je pre mňa natoľko zaujímavé a zábavné, že mi stojí za to sa s tým pohrať. Na strednej škole som si všimol, že prúd vody vytekajúcej z kohútika sa postupne zužuje, a bol som zvedavý, či by som vedel vypočítať, čím to je. Zistil som, že to nie je až také ťažké. *Nemusel* som sa tým zapodievať, pre budúcnosť vedy to nebolo dôležité; ktosi iný to už urobil predom mnou. Na tom nezáležalo: Vymýšľal som si úlohy a hral som sa s nimi pre vlastné potešenie.

— Richard Feynman, *To nemyslíte vážne, pán Feynman!*

Istotne každý, kto sa čo i len trochu zaoberá fyzikou, počul meno Richard Feynman. Bol to nielen geniálny fyzik, ale predovšetkým zvedavý a zábavný človek, ktorý rád spoznával tajomstvá a zákonitosti prírody. Dokázal sa nadchnúť všetkým, čo bolo pekné. Teda nielen dievčatami, ale aj krásou logickej súvislosti medzi fyzikálnymi zákonitosťami. A čo považujeme za najdôležitejšie, fyzikálne problémy riešil preto, lebo mu to prinášalo radosť. Fascinovali ho, nenašiel pokoj, kým si s nejakou úlohou neporadil. Dokázal stráviť nad nimi celé noci. A keď nakoniec prišiel k správnejmu výsledku, tešil sa ako malé dieťa.

Mal neuveriteľný cit pre fyzikálne vnímanie sveta okolo seba. Aj v navonok všednej veci dokázal objaviť niečo zaujímavé a niekedy aj prevratné. Dôkazom toho je aj jeden obyčajný obed počas jedného obyčajného pracovného dňa v reštaurácii, ktorý spomína vo svojej autobiografii *To nemyslíte vážne, pán Feynman!* [1].

Spolu s Feynmanom bol v reštaurácii aj nejaký chlapík, ktorý v bujarej nálade vyhodil do vzduchu tanier. Vyhodený tanier sa otáčal a pritom chvel. Feynman, aspoň tak o tom rozpráva v knihe, si všimol, že tanier sa otáčal

s vyššou frekvenciou, ako bola frekvencia chvenia. Nemal čo robiť, a tak vypočítal pohyb rotujúceho taniera. Zistil, že ak sa tanier počas chvenia vychýľuje o malý uhol, tak pomer frekvencií otáčania a chvenia je presne 2 : 1. Vyšlo mu to zo zložitej rovnice.

Nebol by to Feynman, keby ho toto zložité riešenie uspokojilo. Stále totiž nevidel, *prečo* musí byť pomer frekvencií práve 2 : 1. Preto začal hľadať *jednoduchší spôsob*, ako tento pomer frekvencií zdôvodniť. V čase, keď svojmu spoluhráčovi na bongá, Ralphovi Leightonovi, túto príhodu rozprával, si už presne nepamätal, ako to urobil. Spomínal si len, že preskúmal, ako sa pohybujú jednotlivé body taniera a ako sa ich zrýchlenia vyrovnávajú tak, že to vyjde 2 : 1. Toto jednoduché vysvetlenie Feynmana natoľko vzrušilo, že zašiel za Hansom Bethem a rozradostený mu ukázal, na čo prišiel.

Bethe však pre takéto „bezvýznamné“ hranie sa s fyzikou pochopenie nenašiel. Ale ako Feynman spomína ďalej, diagramy a všetko to, za čo dostal Nobelovu cenu, vzišlo z prplania okolo chvejúceho sa taniera. Od taniera sa Feynman dostal ku kvantovej mechanike a všimol si analógiu medzi rotáciou taniera a spinu, v ktorom tiež nájdeme rovnaký pomer dve ku jednej.¹

Táto práca vznikla z našej túžby vžiť sa do Feynmanovej kože a objavovať spolu s ním. Z toho prirodzene vyplynuli ciele práce. Rozhodli sme sa urobiť všetko to, čo urobil Feynman. Konkrétne to znamená, že sme si dali za cieľ:

1. Pozorovať pohyb vyhodeneého taniera.
2. Vypočítať pohyb vyhodeneého taniera pomocou matematického aparátu fyziky tuhého telesa.
3. Nájsť *jednoduché vysvetlenie* vysvetľujúce pomer frekvencií otáčania a kolísania, o ktorom Feynman v knihe tvrdí, že ho už zabudol.

Podľa týchto cieľov sme zvolili aj štruktúru práce. Každému cieľu zodpovedá jedna kapitola.

V druhej kapitole, *Pozorovanie pohybu vyhodeneého taniera*, popisujeme, ako sme pohyb taniera natočili na video a ako sme získaný záznam potom analyzovali. Pomocou rozboru série snímok sa nám podarilo ukázať, že Feynman sa pri rozprávaní príhody s tanierom pravdepodobne *pomýľil*. Poplietol si fakty, ktoré si bežný čitateľ nevšimne, čiže fakty fyzikálneho významu. V skutočnosti je frekvencia otáčania nižšia ako frekvencia chvenia a ich pomer je prevrátený k pomeru, ktorý uvádza Feynman.²

¹Celý úryvok z Feynmanovej autobiografie popisujúci príhodu v reštaurácii sa nachádza v kapitole Dodatky, článok 6.1, strana 31.

²Keď sme Feynmanovu chybu objavili, mali sme veľkú radosť a dúfali sme, že sme prví. Po krátkom vyhľadávaní na internete sme sa však museli upokojiť. Chybu objavili už pred nami. V novších amerických vydaniach knihy *To nemyslíte vážne, pán Feynman!* sa nachádza poznámka pod čiarou, ktorá upozorňuje na chybu v pomere frekvencií, ktorá Feynmanovi unikla pri čítaní korektúr. Objavil sa aj názor, že Feynman urobil túto chybu zámerne, pričom skúšal čitateľa, či si pokus s tanierom urobí sám [3].

Tretia kapitola, *Teoretický popis lietajúceho taniera*, oboznámi čitateľa so základnými pojmi a faktami z fyziky tuhého telesa a nakoniec aj teoreticky potvrdí, že v skutočnosti sa pomer frekvencie otáčania a kolísania taniera pri malom kolísaní rovná $1 : 2$. V tejto kapitole využívame pokročilejšie predstavy z dynamiky pohybu tuhého telesa.

V štvrtej kapitole, *Jednoduchší spôsob*, sme našli jednoduchý spôsob odvodenia, neprekračujúceho rámec strednej školy, ktoré vysvetľuje, *prečo* musí byť pre tanier pomer frekvencií otáčania a kolísania práve $1 : 2$. Táto kapitola je ťažiskovou časťou celej práce. Jednoduché vysvetlenie, na ktoré sme prišli, je veľmi pravdepodobne práve to vysvetlenie, ktoré v čase cornellskej príhody objavil aj Feynman, ale o ktorom píše, že už zabudol, ako k nemu došiel. Nám pri pátraní po zabudnutom jednoduchšom spôsobe výrazne pomohol *počítačový model taniera*, ktorý sme naprogramovali v jazyku *Java*. Takýto model Feynman vo svojej dobe k dispozícii nemal. Pomocou tohto modelu sme prišli na to, ako sa pohybujú jednotlivé častice taniera. Z ich pohybu už automaticky vyplynul ten správny pomer frekvencií otáčania a kolísania. Potom sa nám pomocou elementárnych úvah podarilo zdôvodniť, *prečo* sa častice musia pri malom kolísaní taniera pohybovať práve tak, ako sa pohybovali v modeli.

V kapitole *Dodatky* sú okrem slovenského prekladu a amerického originálu úryvku z Feynmanovej knihy zahrnuté aj niektoré známe odvodenia, ktoré nie sú podstatné pre samotnú prácu a ktoré je možné nájsť v literatúre. Uviedli sme ich kvôli celistvosti práce.

Všetko toto by sme určite nezvládli urobiť úplne sami, a preto by sme sa chceli na tomto mieste poďakovať nášmu konzultantovi, RNDr. Slavomírovi Tulejovi, učiteľovi fyziky na našej škole, za čas, ktorý nám obetoval, za pomoc pri riešení fyzikálnych a matematických problémov, ale aj za pomoc pri programovaní v objektovo orientovanom programovacom jazyku *Java*. Okrem toho sa tu chceme poďakovať RNDr. Jozefovi Hančovi z Technickej univerzity v Košiciach za trpezlivé prečítanie práce a za množstvo pripomienok, ktoré nám pomohli zvýšiť kvalitu práce.

Kapitola 2

Pozorovanie pohybu vyhodeného taniera

Asi o týždeň som bol v samoobslužnej reštaurácii a nejaký chlapík tam v bujarej nálade vyhodil do vzduchu tanier. Ako stúpал dohora, videl som, že sa chveje, a všimol som si, že červený cornellský emblém, ktorým bol označený, sa rýchlo krúti. Bolo mi jasné, že sa otáčal vyššou frekvenciou, ako bola frekvencia chvenia.

— Richard Feynman, *To nemyslíte vážne, pán Feynman!*

2.1 Experiment

Feynman v úryvku spomína, že na prvý pohľad mu bolo jasné, že tanier sa otáča dvakrát rýchlejšie, ako sa kolíše. Chceli sme toto jeho tvrdenie overiť, a tak sme skúsili sami vyhadzovať do vzduchu tanier a sledovať jeho pohyb. Na obvod taniera sme prilepili lepiacou páskou modrý krúžok, ktorý mal reprezentovať cornellský emblém.

Už naše prvé pokusy s hádzaním nás presvedčili, že nie sme schopní urobiť z obyčajného pozorovania pohybu taniera žiaden záver o tom, či sa naozaj otáča rýchlejšie, ako sa kolíše. Všetko prebiehalo veľmi rýchlo, takže vlastnými zmyslami sme neboli schopní zachytiť detaily pohybu.

Rozhodli sme sa preto pomôcť si videozáznamom. Použili sme videokameru *Panasonic NV-DS60*. Nastavili sme ju do režimu záznamu rýchlych pohybov a natočili sme niekoľko minút vyhadzovania taniera do vzduchu. Videozáznam taniera sme potom na počítači s videokartou prekonvertovali do počítačovej podoby na súbor s príponou *avi*. Pomocou programu *Virtual Dub 1.5.8* sme si potom celý záznam prezerali snímok po snímku a hľadali sme takú sekvenciu snímok, z ktorej by sa dal pomer frekvencií otáčania a kolísania taniera aspoň približne odhadnúť.

6 KAPITOLA 2. POZOROVANIE POHYBU VYHODENÉHO TANIERA

Takých sekvencií sme našli niekoľko. Vybrali sme tú najlepšiu a pomocou programu *GIMP 1.2* sme z nej vyrobili „film“ skladajúci sa zo šiestich políčok, ktorý nájdete na Obr. 2.1. Okrem toho sme vyrobili aj animovaný gif obrázok, ktorý predstavuje mnohonásobne spomalený záznam pohybu taniera. Možno ho nájsť na internete na stránke <http://www.vscience.host.sk/materialy/feynmanPlate/B.htm>.

Aké bolo naše prekvapenie a vzrušenie, keď sme zistili, že **Feynman sa pri svojom rozprávaní príhody z reštaurácie pomýlil a že tanier sa v skutočnosti otáča zhruba dvakrát *pomalšie*, ako sa chveje!** Je to teda presne naopak, ako tvrdil Feynman. Vyplýva to z nasledujúcej analýzy videozáznamu.

2.2 Analýza videozáznamu

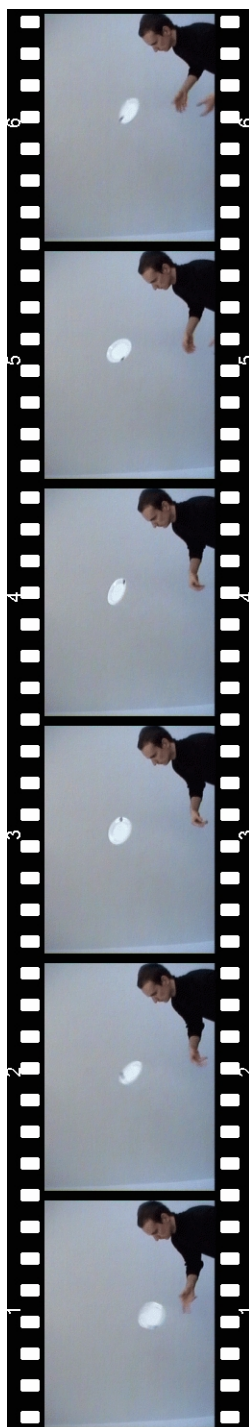
O tom, že sa Feynman mýli, sa môžeme presvedčiť sledovaním políčok filmu na Obr. 2.1. Pod a nad každým políčkom je na filme jeho číslo. Rotácia taniera sa na políčkach prejavuje tak, že modrá značka na obode taniera postupne obieha dookola v smere pohybu hodinových ručičiek. Kolísanie taniera sa prejavuje tak, že rovina taniera periodicky mení svoj uhol voči smeru nášho pohľadu. To sa prejavuje na videu v tom, že tanier vidíme ako viac alebo menej sploštenú elipsu.

Na našom filme predstavujú políčka 1, 3 a 5 z hľadiska kolísania taniera približne rovnakú fázu kolísania, pri ktorej sa nám tanier javí ako menej sploštená elipsa. Podobne políčka 2, 4 a 6 predstavujú takú fázu kolísavého pohybu taniera, pri ktorej sa javí ako viac sploštená elipsa.

Na políčku 2 je tanier odklonený od nás, na políčku 3 sa vychýli k nám a na políčku 4 je znovu odklonený od nás. To znamená, že pohyb taniera medzi políčkami 2 a 4 predstavuje jednu periódu kolísania taniera. Všimnime si, čo počas tohto pohybu urobí modrá značka na obode taniera. Na políčku 2 je približne vľavo hore a na políčku 4 je približne vpravo dole. Modrá značka teda počas jednej periódy kolísania opísala polovicu svojej otáčky. Teda čas, ktorý uplynie medzi políčkom 2 a 4, je približne polovicou jej periódy otáčania. Celú otáčku vykoná modrá značka až medzi políčkami 2 a 6. Za ten čas sa tanier zakýve dvakrát.

To isté sme pozorovali aj na ostatných sekvenciách nášho videa.

Stále sme nemohli uveriť tomu, že by sa Feynman mohol mýliť. A tak sme sa rozhodli pohyb taniera, podobne ako on, teoreticky vypočítať.



Obrázok 2.1: Sekvencia šiestich za sebou idúcich snímkov videozáznamu pohybu vyhodného taniera.

8 KAPITOLA 2. POZOROVANIE POHYBU VYHODENÉHO TANIERA

Kapitola 3

Teoretický popis lietajúceho taniera

Nemal som čo robiť, a tak som začal rátať pohyb rotujúceho taniera. Zistil som, že ak je uhol veľmi malý, emblémik sa otáča dvakrát rýchlejšie, ako je frekvencia chvenia — dve ku jednej. Vyšlo to zo zložitej rovnice!

— Richard Feynman, *To nemyslíte vážne, pán Feynman!*

3.1 Z čoho vychádzame?

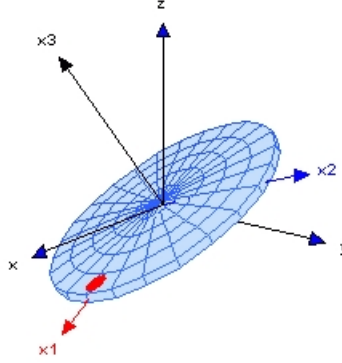
Popísať pohyb taniera nie je vôbec jednoduché. Na prvý pohľad vidieť, že jeho ťažisko vykonáva šikmý vrh a tanier sa okrem toho vzhľadom na ťažisko ešte otáča a kolíše. Mali by sme to omnoho jednoduchšie, keby sme sa pohybovali spolu s ťažiskom taniera. Vtedy by bolo vzhľadom na nás v pokoji a tanier by sa voči nám len otáčal a kolísal. V takejto situácii by boli napríklad astronauti na Medzinárodnej vesmírnej stanici. Dokázali by roztočiť tanier tak, aby sa len otáčal a kolísal, pričom by ťažisko taniera zostávalo v pokoji.

V ďalšom budeme kvôli jednoduchosti odhliadať od toho, že tanier padá v gravitačnom poli a budeme ho popisovať len z bezťažkovej sústavy astronautov. Ich sústavu nazveme **sústava laboratória**. Táto sústava je inerciálna, jej počiatok je v ťažisku taniera a jej osi¹ nech sú \hat{x} , \hat{y} a \hat{z} (Obr.3.1).

Pohyb taniera je veľmi výhodné popisovať aj v druhej vzťažnej sústave, tzv. **sústave taniera** alebo všeobecnejšie, v **sústave telesa**. Jej počiatok je tiež v ťažisku taniera a jej osi \hat{x}_1 , \hat{x}_2 a \hat{x}_3 sú pevne fixované voči tanieru, pričom os \hat{x}_3 má smer rotačnej osi symetrie taniera² (Obr.3.1).

¹Osi budeme v texte reprezentovať jednotkovými vektormi smerujúcimi pozdĺž týchto osí.

²Rotačnou osou symetrie taniera budeme rozumieť os kolmú na rovinu taniera a prechádzajúcu jeho ťažiskom.



Obrázok 3.1: Súradnicové sústavy, v ktorých budeme popisovať pohyb taniera. Sústava laboratória s osami $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ a $\hat{\mathbf{z}}$ a sústava spojená s tuhým telesom s osami $\hat{\mathbf{x}}_1$, $\hat{\mathbf{x}}_2$ a $\hat{\mathbf{x}}_3$.

Pohyb taniera sa riadi základnou dynamickou rovnicou tuhého telesa [4, s. 336 a 362], [5, s. VII-11]:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (3.1)$$

Vystupujú v nej dve veličiny, výsledný moment síl voči ťažisku $\boldsymbol{\tau}$ a moment hybnosti taniera \mathbf{L} , taktiež počítaný voči jeho ťažisku.

Z kinematického hľadiska si možno predstaviť, že tanier v každom okamihu rotuje okolo *okamžitej osi rotácie*, ktorej smer sa môže v priestore s časom meniť. Táto os musí vždy prechádzať ťažiskom taniera. Veľkosť okamžitej uhlovej rýchlosti je ω . Vo fyzike tuhého telesa je výhodné zaviesť vektor $\boldsymbol{\omega}$, ktorý má smer okamžitej osi rotácie a veľkosť rovnú okamžitej uhlovej rýchlosti ω . Je orientovaný tak, aby sa nám pri pohľade z jeho konca javil smer rotácie tuhého telesa proti smeru pohybu hodinových ručičiek. Budeme ho nazývať *vektor okamžitej uhlovej rýchlosti* [5, s. VIII-2].

Existuje lineárny vzťah medzi vektorom okamžitej uhlovej rýchlosti $\boldsymbol{\omega}$ a vektorom momentu hybnosti \mathbf{L} (odvodenie v kapitole Dodatky, článok 6.2, strana 33):

$$\mathbf{L} = I_1\omega_1\hat{\mathbf{x}}_1 + I_2\omega_2\hat{\mathbf{x}}_2 + I_3\omega_3\hat{\mathbf{x}}_3 \quad (3.2)$$

V tomto vzťahu predstavujú konštanty I_1 , I_2 a I_3 tzv. *hlavné momenty zotrvačnosti* taniera, počítané voči osiam $\hat{\mathbf{x}}_1$, $\hat{\mathbf{x}}_2$ a $\hat{\mathbf{x}}_3$. Takýto jednoduchý vzťah pre moment hybnosti neplatí vždy. Ak by bol tanier v sústave súradníc umiestnený v nejakej všeobecnej polohe, bolo by potrebné vo vyjadrení momentu hybnosti použiť všetkých šesť momentov zotrvačnosti taniera, ktoré

by navyše neboli počas jeho pohybu konštantné, ale menili by sa v závislosti na jeho polohe.

Jednoduchý vzťah 3.2 možno použiť napríklad vtedy, keď je tanier v sústave súradníc umiestnený tak, že jeho os rotačnej symetrie má smer tretej súradnicovej osi. Ak toto vyjadrenie budeme chcieť použiť, budeme musieť popísať dynamiku taniera v sústave taniera, voči ktorej sa nehýbe, a jeho umiestnenie v nej neustále spĺňa horeuvedenú podmienku. V tejto sústave má vektor momentu sily $\boldsymbol{\tau}$ súradnice τ_1 , τ_2 a τ_3 a vektor uhlovej rýchlosti $\boldsymbol{\omega}$ súradnice ω_1 , ω_2 a ω_3 . Po dosadení vzťahu 3.2 do dynamickej rovnice 3.1 dostaneme tzv. *Eulerove rovnice tuhého telesa* (odvodenie v kapitole Dodatky, článok 6.3, strana 35):

$$\begin{aligned}\tau_1 &= I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_3 \omega_2 \\ \tau_2 &= I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 \\ \tau_3 &= I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1\end{aligned}\tag{3.3}$$

Tieto rovnice umožňujú v sústave taniera predpovedať časovú závislosť súradníc vektora $\boldsymbol{\omega}$, ak poznáme v tejto sústave časové závislosti súradníc momentu sily $\boldsymbol{\tau}$.

3.2 Dynamika rotujúceho taniera

V tejto časti popíšeme pohyb taniera. Čo budeme rozumieť pod popisom pohybu? Čo chceme získať? Pre náš rozbor postačí, ak budeme poznať časové závislosti vektorov \mathbf{L} , $\boldsymbol{\omega}$ a $\hat{\mathbf{x}}_3$ v sústave laboratória, teda v sústave, z ktorej pohyb taniera pozorujeme. Keďže Eulerove rovnice 3.3 platia pre súradnice vektorov $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\omega}$ vyjadrené v sústave tuhého telesa, k nášmu cieľu sa dostaneme nepriamo, konkrétne tak, že najprv zistíme, ako sa s časom menia spomínané vektory v sústave spojenej s telesom a potom vyšetříme správanie sa ich súradníc v sústave laboratória.

Z rozboru správania sa vektora $\hat{\mathbf{x}}_3$, ktorý je neustále kolmý na rovinu taniera, získame uhlovú frekvenciu kolísania taniera. Tú potom dáme do pomeru s uhlovou frekvenciou otáčania taniera ω a potvrdíme fakt, že tanier sa kolíše dvakrát rýchlejšie ako sa otáča.

3.2.1 Popis v sústave tuhého telesa

Rovnice, ktoré sme doteraz uviedli, platia pre každé tuhé teleso. V tejto časti ich použijeme na špeciálny typ telies, ktoré sú *osovo symetrické* s rotačnou osou symetrie $\hat{\mathbf{x}}_3$. Takým telesom je aj vyhodенý tanier. V našom špeciálnom prípade osovo symetrického telesa platí, že $I_1 = I_2 \equiv I$. Okrem toho budeme uvažovať *voľné* tuhé teleso, na ktoré nepôsobia žiadne vonkajšie momenty

síl. Preto $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$. Tým sa rovnice 3.3 výrazne zjednodušia a nadobudnú tvar:

$$\begin{aligned} 0 &= I\dot{\omega}_1 + (I_3 - I)\omega_2\omega_3 \\ 0 &= I\dot{\omega}_2 + (I - I_3)\omega_1\omega_3 \\ 0 &= I_3\dot{\omega}_3 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Túto sústavu diferenciálnych rovníc teraz vyriešime. Z poslednej z rovníc 3.4 vidíme, že ω_3 musí byť konštanta, lebo I_3 je rôzny od nuly, teda $\dot{\omega}_3$ musí byť nula.

Pre ďalšie zjednodušenie zavedieme substitúciu:

$$\Omega \equiv \left(\frac{I_3 - I}{I} \right) \omega_3 \quad (3.5)$$

Prvé dve rovnice potom nadobudnú tvar:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \Omega\omega_2 &= 0 \\ \dot{\omega}_2 - \Omega\omega_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Z prvej rovnice vyjadríme ω_2 , zderivujeme ho podľa času, čím získame $\dot{\omega}_2$, ktoré dosadíme do druhej rovnice. Dostaneme:

$$\ddot{\omega}_1 + \Omega^2\omega_1 = 0 \quad (3.7)$$

Na naše veľké potešenie sme dostali známu rovnicu harmonických kmitov. Jej riešenie má tvar:

$$\omega_1(t) = A \cos(\Omega t + \Phi) \quad (3.8)$$

Teraz pomocou vyjadrenej závislosti $\omega_1(t)$ určíme závislosť $\omega_2(t)$. Z prvej z rovníc 3.6 vieme, že $\omega_2(t) = -\frac{\dot{\omega}_1(t)}{\Omega}$. Preto

$$\omega_2(t) = -\frac{-A\Omega \sin(\Omega t + \Phi)}{\Omega} = A \sin(\Omega t + \Phi) \quad (3.9)$$

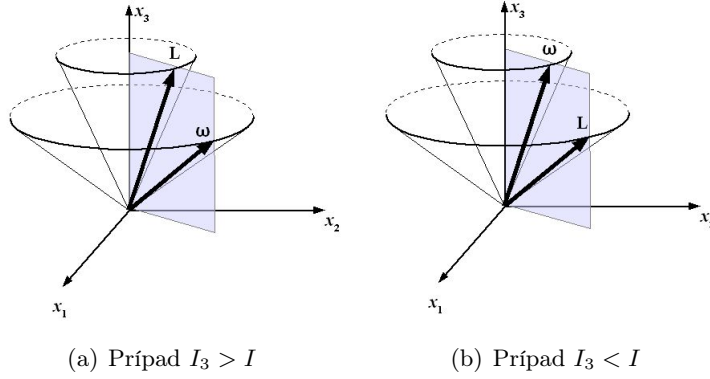
Vektor $\boldsymbol{\omega}$ môžeme teraz zapísať v tvare

$$\boldsymbol{\omega} = A \cos(\Omega t + \Phi) \hat{\mathbf{x}}_1 + A \sin(\Omega t + \Phi) \hat{\mathbf{x}}_2 + \omega_3 \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (3.10)$$

Ak predchádzajúce vyjadrenie vektora uhlovej rýchlosti dosadíme do vzťahu 3.2, získame zložky momentu hybnosti \mathbf{L} :

$$\mathbf{L} = IA \cos(\Omega t + \Phi) \hat{\mathbf{x}}_1 + IA \sin(\Omega t + \Phi) \hat{\mathbf{x}}_2 + I_3 \omega_3 \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (3.11)$$

Z predchádzajúcich dvoch vzťahov môžeme vyčítať, že *v sústave pevne spojenej s tuhým telesom* popisujú vektory $\boldsymbol{\omega}$ a \mathbf{L} okolo vektora $\hat{\mathbf{x}}_3$ kužeľové plochy, pričom osou oboch kužeľov je $\hat{\mathbf{x}}_3$. Konce oboch vektorov sa pohybujú

Obrázok 3.2: Pohyb vektorov ω , \mathbf{L} a $\hat{\mathbf{x}}_3$ v sústave telesa.

po kružniciach s rovnakou uhlovou frekvenciou Ω . Roviny oboch kružníc sú kolmé na os $\hat{\mathbf{x}}_3$. Polomer kružnice vektora ω je A a polomer kružnice vektora \mathbf{L} je IA (Obr. 3.2).

Treba ešte dodať, že podľa vzťahu 3.5 veľkosť frekvencie Ω závisí na hodnote ω_3 a tiež na geometrickom usporiadaní tuhého telesa (konkrétne I a I_3). Ak $I < I_3$, hodnota Ω bude kladná. Ak $I > I_3$, bude hodnota Ω záporná a konce vektorov ω a \mathbf{L} budú okolo $\hat{\mathbf{x}}_3$ obiehať po kružniciach v opačnom smere, ako je smer otáčania tuhého telesa voči laboratóriu. Amplitúda A a teda aj vrcholový uhol kužeľov je daný začiatočnými hodnotami ω_2 a ω_3 .

3.2.2 Popis v sústave laboratória

Teraz sa pozrime na dynamiku osovo symetrického tuhého telesa zo sústavy laboratória. Vyjadríme vektory ω a \mathbf{L} pomocou vektorov $\hat{\mathbf{x}}_1$, $\hat{\mathbf{x}}_2$ a $\hat{\mathbf{x}}_3$ a dostaneme vzťahy

$$\omega = (\omega_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \omega_2 \hat{\mathbf{x}}_2) + \omega_3 \hat{\mathbf{x}}_3$$

$$\mathbf{L} = I(\omega_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \omega_2 \hat{\mathbf{x}}_2) + I_3 \omega_3 \hat{\mathbf{x}}_3$$

Z prvého vyjadríme súčet $(\omega_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \omega_2 \hat{\mathbf{x}}_2)$ a dosadíme ho do druhej rovnice. Po krátkej úprave, v ktorej využijeme vzťah 3.5, dostaneme vzťah

$$\mathbf{L} = I(\omega + \Omega \hat{\mathbf{x}}_3)$$

z ktorého vyjadríme ω :

$$\omega = \frac{\mathbf{L}}{I} - \Omega \hat{\mathbf{x}}_3$$

Podobne, ako máme zavedené jednotkové vektory v smeroch osí $\hat{\mathbf{x}}_1$, $\hat{\mathbf{x}}_2$ a $\hat{\mathbf{x}}_3$, môžeme zaviesť aj jednotkový vektor v smere vektora \mathbf{L} , ktorý označíme $\hat{\mathbf{L}}$. Pritom platí $\mathbf{L} = L\hat{\mathbf{L}}$. Vzťah pre ω potom nadobudne tvar:

$$\omega = \frac{L}{I} \hat{\mathbf{L}} - \Omega \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (3.12)$$

Vieme, že na tanier nepôsobí žiadny moment sily, a preto je vektor \mathbf{L} v inerciálnej sústave laboratória konštantný. Ukážeme, že vektory $\boldsymbol{\omega}$ a $\hat{\mathbf{x}}_3$ budú obiehať okolo \mathbf{L} , pričom stále budú ležať v jednej rovine.

Rovnica 3.12 nám hovorí, že vektor $\boldsymbol{\omega}$ je lineárnou kombináciou vektorov \mathbf{L} a $\hat{\mathbf{x}}_3$. Z toho vyplýva, že všetky tieto tri vektory musia vždy ležať v jednej rovine. Zostáva nám už len zistiť, ako sa správa vektor $\hat{\mathbf{x}}_3$. Pohyb vektora $\boldsymbol{\omega}$ bude potom daný vzťahom 3.12.

Rýchlosť každého bodu pevne spojeného s telesom je v sústave laboratória daná vzťahom

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (3.13)$$

kde $\boldsymbol{\omega}$ je okamžitá uhlová rýchlosť telesa a \mathbf{r} je polohový vektor daného bodu. Pretože vektor $\hat{\mathbf{x}}_3$ je pevne spojený s telesom, možno vzťah 3.13 použiť pre rýchlosť jeho koncového bodu $d\hat{\mathbf{x}}_3/dt$. Čiže

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}_3}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{x}}_3 = \left(\frac{L}{I} \hat{\mathbf{L}} - \Omega \hat{\mathbf{x}}_3 \right) \times \hat{\mathbf{x}}_3 = \left(\frac{L}{I} \hat{\mathbf{L}} \right) \times \hat{\mathbf{x}}_3 - \Omega \hat{\mathbf{x}}_3 \times \hat{\mathbf{x}}_3$$

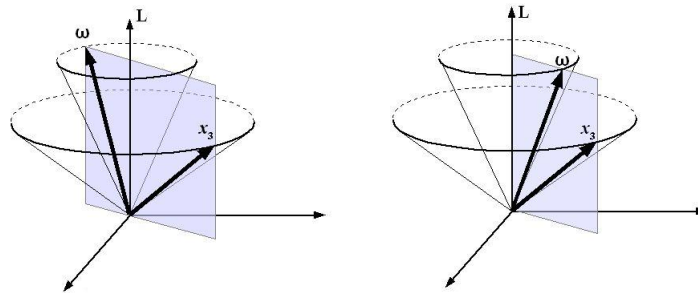
Pretože $\Omega \hat{\mathbf{x}}_3 \times \hat{\mathbf{x}}_3$ je nula, dostaneme vzťah:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}_3}{dt} = \left(\frac{L}{I} \hat{\mathbf{L}} \right) \times \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (3.14)$$

Poslednú rovnicu možno s prihliadnutím k vzťahu 3.13 interpretovať tak, že vektor $\hat{\mathbf{x}}_3$ rotuje okolo konštantného vektora $\frac{L}{I} \hat{\mathbf{L}}$, ktorý nazveme $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$, pričom uhlová rýchlosť jeho rotácie v sústave laboratória je

$$|\tilde{\boldsymbol{\omega}}| \equiv \tilde{\omega} = \frac{L}{I} \quad (3.15)$$

A keďže všetky tri vektory \mathbf{L} , $\boldsymbol{\omega}$ a $\hat{\mathbf{x}}_3$ ležia v jednej rovine, aj vektor $\boldsymbol{\omega}$ musí rotovať okolo \mathbf{L} tou istou uhlovou rýchlosťou (Obr. 3.3).



(a) Prípád $I_3 > I$

(b) Prípád $I_3 < I$

Obrázok 3.3: Pohyb vektorov $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{L} a $\hat{\mathbf{x}}_3$ v sústave laboratória.

To, že koniec vektora $\hat{\mathbf{x}}_3$, ktorý je normálovým vektorom taniera, rotuje okolo vektora \mathbf{L} , bude mať za dôsledok pravidelné kolísanie roviny taniera. Práve toto kolísanie mal na mysli Feynman. Jeho uhlová frekvencia je $\tilde{\omega}$. V nasledujúcom odseku porovnáme túto uhlovú frekvenciu s uhlovou frekvenciou otáčania taniera v prípade, že amplitúda chvenia taniera je veľmi malá.

3.2.3 Čo platí pre malé kolísanie taniera?

Od začiatku sa snažíme ukázať, že pre malé výchylky taniera od vodorovnej polohy sa tanier kolíše dvakrát rýchlejšie, ako sa otáča. A v tejto chvíli sme už skoro v cieľi. Aby sme to dokázali, musíme porovnať veľkosti vektorov $\tilde{\omega}$ a ω , t.j. vyjadriť pomer $\tilde{\omega} : \omega$.

Vyjadríme si $\tilde{\omega}$ pomocou súradníc vektora uhlovej rýchlosti ω a hlavných momentov zotrvačnosti:

$$\tilde{\omega} = \frac{L}{I} = \frac{\sqrt{I^2\omega_1^2 + I^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2}}{I}$$

Keďže sa tanier vychýľuje iba o malé uhly, predpokladáme, že:

$$\omega_1 \ll \omega_3 \quad \omega_2 \ll \omega_3$$

Keď vezmeme do úvahy tieto podmienky, potom môžeme vo vzťahu pre $\tilde{\omega}$ prvé dva členy pod odmocninou zanedbať a zostane nám vzťah

$$\tilde{\omega} \approx \frac{I_3}{I}\omega_3$$

Podobne môžeme uvažovať aj o vektore ω . Pre jeho veľkosť po uvážení podmienok malého chvenia platí:

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} \approx \omega_3$$

Teraz už ľahko vyjadríme pomer frekvencií kolísania a otáčania

$$\frac{\tilde{\omega}}{\omega} \approx \frac{I_3}{I} \quad (3.16)$$

V prípade taniera³ platí $\frac{I_3}{I} = 2$. Preto:

$$\tilde{\omega} \approx 2\omega \quad (3.17)$$

A sme v cieľi! Práve sme dokázali, že uhlová rýchlosť, ktorou sa tanier kolíše, je dvojnásobkom uhlovej rýchlosti, ktorou sa otáča.

Z toho vidíme, že Feynman sa naozaj v knihe svojich spomienok pomýlil a že si vybavil pomer frekvencií opačne. Feynmanovu chybu, ktorú naznačoval videozáznam pohybu taniera, sme takto potvrdili aj teoreticky.

³Presnejšie, platí to pre nekonečne tenký homogénny disk. Pre tanier to platí len približne.

Kapitola 4

Jednoduchší spôsob

Potom som si pomyslel: „Neexistuje jednoduchší spôsob, ako prísť na to, prečo je to jedna ku dvom? Čo keby som tak preskúmal pôsobiace sily alebo celú dynamiku?“ Už si nepamätám, ako som na to šiel, ale nakoniec som sa dopracoval k tomu, ako vyzerá pohyb hmotných častíc a ako sa všetky zrýchlenia vyrovnávajú tak, že to vyjde jedna ku dvom.

— Richard Feynman, *To nemyslíte vážne, pán Feynman!*

4.1 Počítačový model taniera

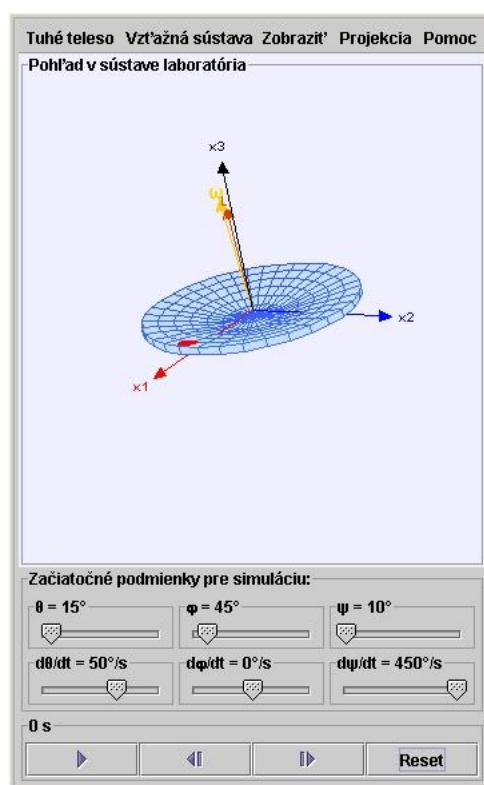
V predchádzajúcej kapitole sme ukázali, prečo je pomer frekvencií otáčania a chvenia jedna ku dvom. Naše odvodenie vyžadovalo veľa matematiky a predovšetkým použitie dosť náročných a abstraktných pojmov z fyziky tuhého telesa. Feynman v úvodnom úryvku spomína to, že našiel *jednoduchší spôsob* ako vysvetliť, *prečo* je pomer jedna ku dvom. Toto je pre Feynmana charakteristické, lebo stále mieril k podstate problémov. Feynman spomína, že skúmal pohyb jednotlivých častíc taniera a prišiel na to, ako sa ich „zrýchlenia vyrovnávajú“ tak, že to vyjde jedna ku dvom. Navyše spomína, že už si nepamätá, ako to urobil.

Myšlienka na toto jeho jednoduchšie odvodenie nás provokovala dosť dlhú dobu. Nemali sme ani najmenšiu predstavu o tom, ako Feynman postupoval. Medzitým sme sa rozhodli modelovať pohyb taniera na počítači. Naším cieľom bolo urobiť applet v jazyku *Java*, ktorý by po zadaní začiatkových podmienok pohybu taniera vypočítal jeho ďalší pohyb a priebežne ho animoval.

Z odbornej literatúry [5, s. VIII-27] sme sa dozvedeli, že na simuláciu pohybu taniera potrebujeme určiť v každom čase tri *Eulerove* uhly θ , ϕ , ψ udávajúce polohu taniera v priestore. Dynamické rovnice popisujúce časovú zmenu Eulerových uhlov sa získajú z Eulerových pohybových rovníc a z geometrických vzťahov medzi týmito uhlami a jednotkovými vektormi $\hat{\mathbf{x}}_1$,

$\hat{\mathbf{x}}_2$ a $\hat{\mathbf{x}}_3$ sústavy súradníc spojenej s tanierom. Definície Eulerových uhlov a dynamické rovnice sú uvedené v kapitole Dodatky, článok 6.4, strana 36.

Java applet sme naprogramovali pomocou knižnice *Open Source Physics* [6], ktorá obsahuje užitočné algoritmy na numerické riešenie diferenciálnych rovníc a na zobrazovanie trojrozmerných objektov. Nazvali sme ho *Feynmanov lietajúci tanier* (viď Obrázok 4.1). Tento applet sa nachádza na internete na adrese <http://www.vscience.host.sk/materialy/feynmanPlate/C.htm>.



Obrázok 4.1: Java applet *Feynmanov lietajúci tanier*. Applet umožňuje simuláciu pohybu taniera a iných tuhých telies pri daných začiatočných podmienkach. Okrem toho umožňuje zobrazovať osi súradnicových sústav laboratória a tuhého telesa a pomocou stôp sledovať pohyb koncových bodov zobrazovaných vektorov.

4.2 Čo nám počítačový model taniera prezradil?

Pozorovaním pohybu simulovaného taniera sme sa uistili v tom, že teória v predchádzajúcej kapitole je správna. Koniec vektora $\hat{\mathbf{x}}_3$ naozaj obieha okolo

vektora \mathbf{L} po kružnici s dvojnásobnou frekvenciou, ako sa otáča tanier.

Napadlo nás potom preskúmať, ako sa pohybujú jednotlivé body taniera. Nechali sme si na applete vykresľovať stopy koncových bodov vektorov $\hat{\mathbf{x}}_1$, $\hat{\mathbf{x}}_2$ a $\hat{\mathbf{x}}_3$ pre malé kolísanie taniera. Od vektora $\hat{\mathbf{x}}_3$ sme očakávali, že sa jeho koniec bude pohybovať po maličkšej kružnici. Od koncov vektorov $\hat{\mathbf{x}}_1$ a $\hat{\mathbf{x}}_2$ sme očakávali pohyb po zložitých, navzájom blízkych krivkách, o ktorých sme nevedeli povedať, či budú uzavreté.

Aké bolo naše prekvapenie, keď sme zistili, že **konce vektorov $\hat{\mathbf{x}}_1$ a $\hat{\mathbf{x}}_2$ sa pohybujú po kružniciach so spoločným stredom a ležiacich v dvoch rôznych rovinách zvierajúcich malý uhol!** Zdalo sa nám to neuveriteľné, lebo sme intuitívne očakávali omnoho zložitejší pohyb.

Situácia je prehľadne znázornená na Obr. 4.2. Z neho je na prvý pohľad zrejmé, že zatiaľ čo sa koniec vektora $\hat{\mathbf{x}}_1$ (a tiež vektora $\hat{\mathbf{x}}_2$) presunie po svojej kružnici dookola raz, prejde koniec vektora $\hat{\mathbf{x}}_3$ po svojej kružnici dookola dvakrát. Toto automaticky vedie k pomeru frekvencií otáčania a kolísania jedna ku dvom.

Tu sme začali chápať, prečo bol Feynman z taniera taký vzrušený. Našiel neočakávanú jednoduchosť v navonok zložitom pohybe. Medzi tým, čo sme urobili my a o čom píše on, bol však stále značný rozdiel. On hovorí, že sa *dopracoval* k tomu, ako vyzerá pohyb hmotných častíc a ako sa ich zrýchlenia potom vyrovnávajú. Nás k tomuto poznaniu priviedla počítačová simulácia. Nášmu postupu chýbalo to, že sme nevedeli, *prečo* sa konce vektorov *musia* pre malé kolísanie pohybovať po kružniciach.

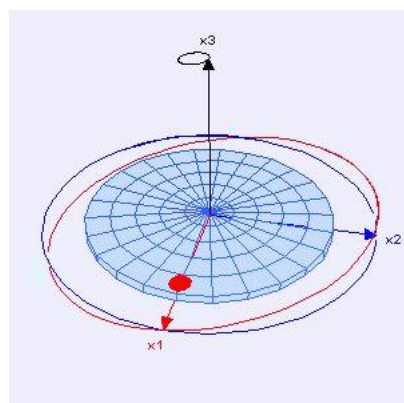
Začali sme preto rozmýšľať nad tým, ako dokázať, že pohyb koncov vektorov $\hat{\mathbf{x}}_1$ a $\hat{\mathbf{x}}_2$ po kružniciach je nevyhnutný.

4.3 Prečo kružnice?

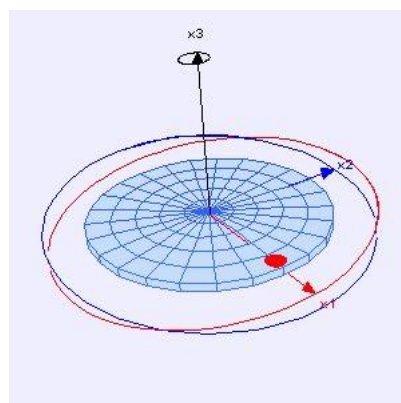
4.3.1 Zjednodušenie – elementárny tanier

V predchádzajúcej kapitole sme dokázali, že dynamické vlastnosti osovo symetrického tuhého telesa, teda aj nášho taniera, sú dané pomerom hlavných momentov zotrvačnosti. Vieme, že ak tanier považujeme za tenký disk, hlavné momenty zotrvačnosti sú: $I_1 = I_2 \equiv I$, $I_3 = 2I$. Tanier je veľmi zložitým telesom, skladá sa z obrovského počtu častíc. Aby sme si uľahčili prácu, hľadali sme čo najjednoduchšie teleso, ktoré by malo rovnaké hlavné momenty zotrvačnosti. Takým telesom je napríklad sústava štyroch hmotných bodov s rovnakou hmotnosťou ležiacich vo vrchoch štvorca a pospájaných nehmotnými tuhými tyčami. Pre jednoduchosť vyjadrovania nazvime toto tuhé teleso *elementárny tanier* (Obr. 4.3). Dôležité je to, že sa bude správať rovnako ako skutočný tanier.

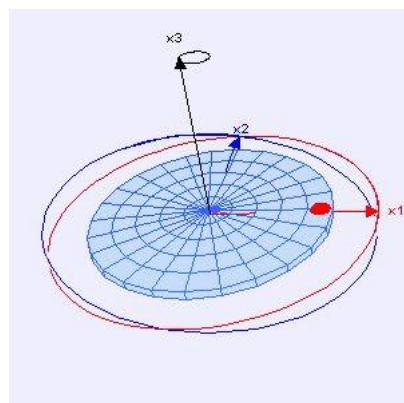
Nech všetky hmotné body elementárneho taniera majú rovnakú hmotnosť m a dva z nich nech ležia v smeroch jednotkových vektorov $\hat{\mathbf{x}}_1$ a $\hat{\mathbf{x}}_2$ sústavy súradníc spojennej pevne s elementárnym tanierom, ktorej počiatok je v jeho



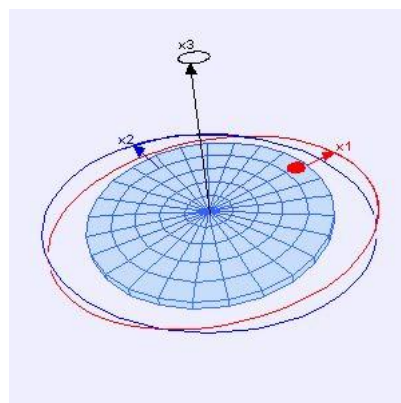
(a) začiatok



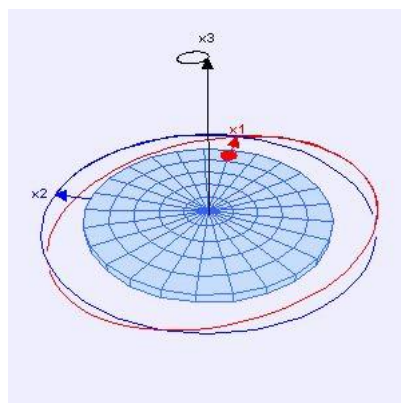
(b) osmina obehu



(c) štvrtina obehu

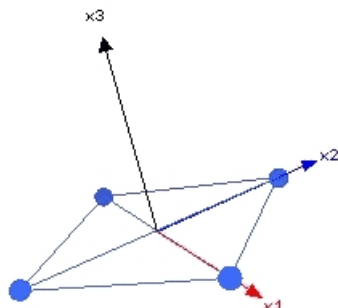


(d) tri osminy obehu



(e) polovica obehu

Obrázok 4.2: Vysvetlenie pomeru jedna ku dvom. Zatiaľ čo koniec vektora \hat{x}_1 (a tiež vektora \hat{x}_2) prejde polovicu svojej kružnice, prejde koniec vektora \hat{x}_3 celú svoju kružnicu. Obieha teda s dvakrát väčšou frekvenciou. Preto je kolísanie taniera dvakrát rýchlejšie ako jeho otáčanie.



Obrázok 4.3: Elementárny tanier. Tuhé teleso pozostávajúce zo štyroch rovnakých hmotných bodov umiestnených vo vrcholoch štvorca, pospájaných navzájom nehmotnými tyčami.

ťažisku. Teda pre polohové vektory bodov elementárneho taniera platí $\mathbf{r}_1 = -\mathbf{r}_3$ a $\mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_4$.

4.3.2 Plán útoku

Naším cieľom bude dokázať, že konce vektorov $\hat{\mathbf{x}}_1$ a $\hat{\mathbf{x}}_2$ (a teda aj všetky hmotné body elementárneho taniera) sa pohybujú po dvoch navzájom blízky, nie nutne rovnobežných kružniciach so spoločným stredom. Dokážeme to tak, že preskúmame zrýchlenia koncových bodov týchto vektorov a ukážeme o nich, že sú vždy *dostredivé*, teda že majú len radiálne zložky a že ich tangenciálne zložky sú zanedbateľne malé. To dosiahneme tak, že nájdeme vzťah pre veľkosť tangenciálnych zložiek týchto zrýchlení a pomocou neho ukážeme, že tieto zložky možno pre malé kolísanie taniera úplne zanedbať. Nakoniec ukážeme, že pohyb skutočného taniera možno pochopiť ako dôsledok pohybu elementárnych tanierov, z ktorých ho možno zložiť.

Cesta ku vzťahu pre veľkosť tangenciálnych zrýchlení vedie cez niekoľko zastávok. Najprv sa pozrieme, čo nám o pohybe elementárneho taniera povie elementárna fyzika tuhého telesa.

4.3.3 Rovnováha zrýchlení

Na každý hmotný bod elementárneho taniera pôsobí sila \mathbf{F}_i , $i = 1 \dots 4$, ktorá súvisí so zrýchlením tohto hmotného bodu podľa druhého Newtonovho zákona daného vzťahom $\mathbf{F}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$. Sila \mathbf{F}_i je výslednicou tiažovej sily a síl,

ktorými pôsobia na daný hmotný bod ostatné hmotné body. Vieme, že na elementárny tanier pôsobí nulový moment sily, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$.

$$\mathbf{0} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i)$$

Ak do druhej sumy dosadíme konkrétne pre elementárny tanier, pričom uvážime, že $\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\ddot{\mathbf{r}}_3$ a $\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\ddot{\mathbf{r}}_4$, dostaneme:

$$m(\mathbf{r}_1 \times \ddot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}_2 \times \ddot{\mathbf{r}}_2 + \mathbf{r}_3 \times \ddot{\mathbf{r}}_3 + \mathbf{r}_4 \times \ddot{\mathbf{r}}_4) = \mathbf{0}$$

$$m[\mathbf{r}_1 \times \ddot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}_2 \times \ddot{\mathbf{r}}_2 + (-\mathbf{r}_1) \times (-\ddot{\mathbf{r}}_1) + (-\mathbf{r}_2) \times (-\ddot{\mathbf{r}}_2)] = \mathbf{0}$$

$$2\mathbf{r}_1 \times \ddot{\mathbf{r}}_1 + 2\mathbf{r}_2 \times \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{r}_1 \times \ddot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}_2 \times \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{0}$$

Členy $\ddot{\mathbf{r}}_1$ a $\ddot{\mathbf{r}}_2$ predstavujú zrýchlenia koncových bodov vektorov \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 . Označme ich \mathbf{a}_1 a \mathbf{a}_2 . Tak dostávame to, čo Feynman nazval *rovnováha zrýchlení*:

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{a}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

Teraz je všetko jednoduchšie. Postačí, ak budeme sledovať pohyb dvoch bodov elementárneho taniera. Tie, spolu s ťažiskom, dokážu jednoznačne popísať polohu taniera. Tieto body sa môžu pohybovať iba po guľovej ploche so stredom v ťažisku.

Podmienku rovnováhy zrýchlení si teraz prepíšeme do ešte užitočnejšieho tvaru, v ktorom budú vystupovať len tangenciálne zrýchlenia.

4.3.4 Rozklad zrýchlení na radiálne a tangenciálne zložky

Zrýchlenie, tak ako hociktorý iný vektor, môžeme rozložiť na zložky. Zrýchlenia rozložíme do radiálneho a tangenciálneho smeru.

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_{1 \text{ rad}} + \mathbf{a}_{1 \text{ tan}}$$

Pre vektorový súčin $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{a}_1$ platí

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{a}_{1 \text{ rad}} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{a}_{1 \text{ tan}}$$

Prvý člen výsledku je *nula*, pretože vektory \mathbf{r}_1 a $\mathbf{a}_{1 \text{ rad}}$ ležia na jednej priamke. Vzťah sa preto zjednoduší na tvar

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{a}_{1 \text{ tan}}$$

To isté platí aj pre zrýchlenie \mathbf{a}_2 . Na základe toho z rovnice 4.1 získame užitočnejšiu podobu podmienky rovnováhy zrýchlení

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{a}_{1 \text{ tan}} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{a}_{2 \text{ tan}} = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

Pripomeňme si, že chceme nájsť vzťah pre veľkosť tangenciálnych zrýchlení. Ich veľkosť však určíme len ťažko, keď zatiaľ nevieme vôbec nič o ich smeroch. Smery týchto zrýchlení nájdeme pri našej ďalšej zastávke.

4.3.5 Smery a veľkosti tangenciálnych zrýchlení

Teraz ukážeme, že podmienka rovnováhy tangenciálnych zrýchlení môže byť splnená len v tom prípade, ak $\mathbf{a}_{1 \text{ tan}}$ a $\mathbf{a}_{2 \text{ tan}}$ ležia v rovine tvorenej vektormi \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 a majú rovnakú veľkosť.

Predpokladajme zatiaľ, že tangenciálne zrýchlenia $\mathbf{a}_{1 \text{ tan}}$ a $\mathbf{a}_{2 \text{ tan}}$ majú ľubovoľné veľkosti a smery (Obr. 4.4a). Výsledok vektorového súčinu $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{a}_{1 \text{ tan}}$ je určite kolmý na vektor \mathbf{r}_1 , a preto leží v kolmej rovine určenej vektormi $\hat{\mathbf{x}}_2$ a $\hat{\mathbf{x}}_3$. Z tých istých dôvodov výsledok vektorového súčinu $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{a}_{2 \text{ tan}}$ leží v rovine určenej vektormi $\hat{\mathbf{x}}_1$ a $\hat{\mathbf{x}}_3$. Oba tieto súčiny sa podľa rovnice 4.2 musia navzájom zrušiť. To môžu len tak, ak budú oba ležať na vektorovej priamke vektora $\hat{\mathbf{x}}_3$, ktorá je prienikom vyššie spomínaných rovín. Dôsledkom toho je, že *bud'* musí byť vektor $\mathbf{a}_{1 \text{ tan}}$ súhlasne rovnobežný s vektorom $\hat{\mathbf{x}}_2$ a vektor $\mathbf{a}_{2 \text{ tan}}$ súhlasne rovnobežný s vektorom $\hat{\mathbf{x}}_1$ (Obr. 4.4b), *alebo* musí byť vektor $\mathbf{a}_{1 \text{ tan}}$ nesúhlasne rovnobežný s vektorom $\hat{\mathbf{x}}_2$ a vektor $\mathbf{a}_{2 \text{ tan}}$ nesúhlasne rovnobežný s vektorom $\hat{\mathbf{x}}_1$ (Obr. 4.4c). V oboch prípadoch musia byť *veľkosti* oboch tangenciálnych zrýchlení rovnaké, t.j. musí platiť $|\mathbf{a}_{1 \text{ tan}}| = |\mathbf{a}_{2 \text{ tan}}| \equiv a_{\text{tan}}$.

Nasledujúca zastávka je poslednou zastávkou pred naozajstným odvodením vzťahu pre veľkosť tangenciálnych zrýchlení. Zapišeme v nej matematické podmienky vyjadrujúce fakt, že elementárny tanier je tuhé teleso.

4.3.6 Elementárny tanier je *tuhé* teleso!

Doteraz sme ešte nevyužili fakt, že elementárny tanier je tuhé teleso. To znamená, že všetky jeho štyri hmotné body nemenia svoju vzdialenosť od ťažiska a sú vzhlľadom na seba vždy pokoji. Inými slovami môžeme povedať, že dĺžky vektorov \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 sa nemenia a vektor \mathbf{r}_1 zvierá s vektorom \mathbf{r}_2 vždy pravý uhol. Preto musí platiť:

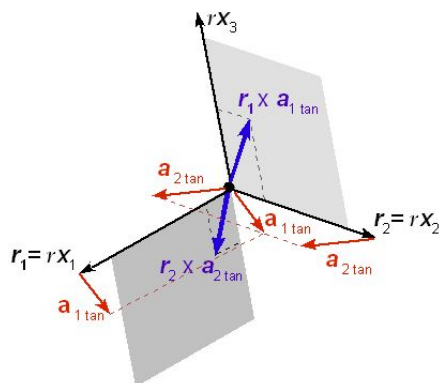
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 &= r^2 \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2 &= r^2 \\ \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 &= 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ak derivujeme podľa času prvú a druhú rovnicu, dostávame podmienky

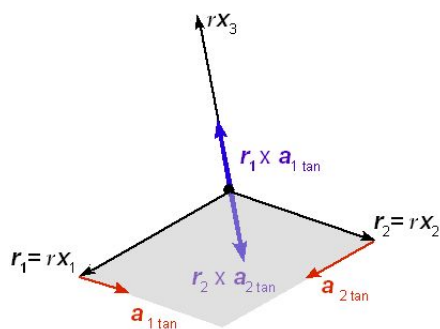
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_1 &= 0 \\ \mathbf{r}_2 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 &= 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

hovoriace o tom, že rýchlosti pohybu koncových bodov vektorov \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 sú na tieto vektory v zodpovedajúcom poradí kolmé. Tieto podmienky využijeme neskôr.

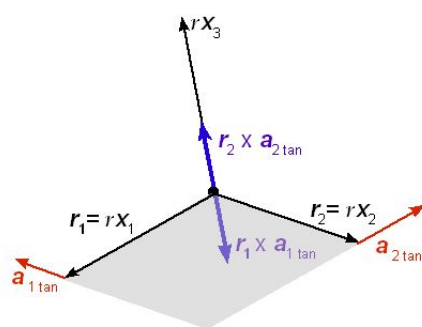
Teraz už máme všetko pripravené na to, aby sme odvodili vzťah pre veľkosť tangenciálnych zrýchlení.



(a) Takto by to byť nemohlo, lebo vektorové súčiny sa nemajú ako zrušiť.



(b) Prvý možný prípad.



(c) Druhý možný prípad.

Obrázok 4.4: Tangenciálne zrýchlenia.

4.3.7 Vzťah pre veľkosť tangenciálnych zrýchlení

Ak derivujeme dvakrát podľa času tretiu z rovníc 4.3, dostaneme

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 \cdot \mathbf{r}_2 + \ddot{\mathbf{r}}_2 \cdot \mathbf{r}_1 + 2\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 = 0$$

Už vyššie sme spomínali, že $\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_{1\text{ rad}} + \mathbf{a}_{1\text{ tan}}$, teda že vektor zrýchlenia má svoju radiálnu a tangenciálnu zložku. To platí aj pre \mathbf{a}_2 . Keď to dosadíme do predchádzajúcej rovnice, dostávame:

$$\mathbf{a}_{1\text{ rad}} \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_{1\text{ tan}} \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_{2\text{ rad}} \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_{2\text{ tan}} \cdot \mathbf{r}_1 + 2\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 = 0 \quad (4.5)$$

Vektor $\mathbf{a}_{1\text{ rad}}$ má rovnaký smer ako vektor \mathbf{r}_1 . Preto je kolmý na vektor \mathbf{r}_2 a skalárny súčin $\mathbf{a}_{1\text{ rad}} \cdot \mathbf{r}_2$ sa rovná nule. Z podobných dôvodov sa nule rovná aj tretí člen predchádzajúcej rovnice.

Vektor $\mathbf{a}_{1\text{ tan}}$ má rovnaký smer ako vektor \mathbf{r}_2 , a preto veľkosť ich skalárneho súčinu $\mathbf{a}_{1\text{ tan}} \cdot \mathbf{r}_2$ musí byť $\pm ra_{\text{tan}}$. Znamienko plus bude platiť, ak sú vektory orientované súhlasne. Inak má súčin znamienko mínus. Z podobných dôvodov sa aj veľkosť súčinu $\mathbf{a}_{2\text{ tan}} \cdot \mathbf{r}_1$ rovná $\pm ra_{\text{tan}}$. Výsledok je rovnaký aj preto, lebo vektory $\mathbf{a}_{1\text{ tan}}$ a $\mathbf{a}_{2\text{ tan}}$ majú rovnakú veľkosť. Preto možno rovnicu 4.5 zjednodušiť na tvar

$$\pm 2ra_{\text{tan}} + 2\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 = 0$$

alebo

$$a_{\text{tan}} = \left| \frac{\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2}{r} \right| \quad (4.6)$$

Posledná rovnica je veľmi cenná, lebo práve pomocou nej ukážeme, že veľkosť a_{tan} je zanedbateľne malá, presnejšie, že je to malá veličina druhého rádu, čo nás oprávni tvrdiť, že štyri body elementárneho taniera majú iba radiálne zrýchlenia, a teda sa pohybujú po kružniciach.

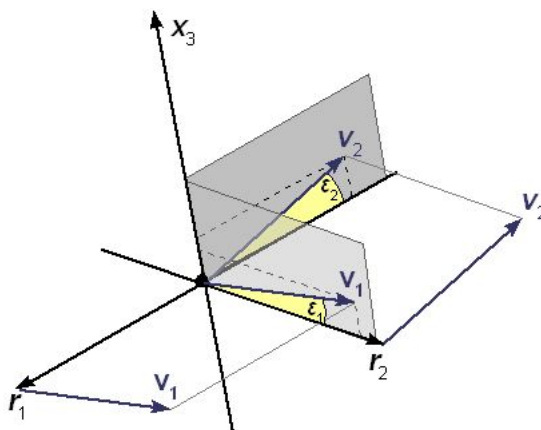
4.3.8 Dôsledky pre malé kolísanie taniera

Z rovnice 4.4 vieme, že vektor $\dot{\mathbf{r}}_1$ musí byť kolmý na vektor \mathbf{r}_1 . Preto ho možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov $\hat{\mathbf{x}}_2$ a $\hat{\mathbf{x}}_3$. Podobne vektor $\dot{\mathbf{r}}_2$ je kolmý na vektor \mathbf{r}_2 a možno ho vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov $\hat{\mathbf{x}}_1$ a $\hat{\mathbf{x}}_3$ (Obr. 4.5).

Zároveň $\dot{\mathbf{r}}_1$ a \mathbf{r}_2 zvierajú malý uhol ϵ_1 a $\dot{\mathbf{r}}_2$ a \mathbf{r}_1 zvierajú malý uhol ϵ_2 . To, že tieto uhly sú malé, vieme z predpokladu, že tanier sa pri malom kolísaní vychýľuje iba o malý uhol. Potom môžeme písať

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = |\dot{\mathbf{r}}_1| \cos \epsilon_1 \hat{\mathbf{x}}_2 + |\dot{\mathbf{r}}_1| \sin \epsilon_1 \hat{\mathbf{x}}_3$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = -|\dot{\mathbf{r}}_2| \cos \epsilon_2 \hat{\mathbf{x}}_1 + |\dot{\mathbf{r}}_2| \sin \epsilon_2 \hat{\mathbf{x}}_3$$



Obrázok 4.5: Rýchlosti koncov vektorov \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 . Na obrázku sú rýchlosti $\dot{\mathbf{r}}_1$ a $\dot{\mathbf{r}}_2$ označené ako \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2

Tieto vyjadrenia dosadíme do rovnice 4.6 a vyjadríme a_{tan} . Kvôli kolmosti vektorov sa skoro všetko vynuluje a zostane len

$$a_{\text{tan}} = \frac{|\dot{\mathbf{r}}_1| |\dot{\mathbf{r}}_2|}{r} \sin \epsilon_1 \sin \epsilon_2 \approx \frac{|\dot{\mathbf{r}}_1| |\dot{\mathbf{r}}_2|}{r} \epsilon_1 \epsilon_2 \quad (4.7)$$

Vidíme, že vo výraze pre a_{tan} vystupuje súčin $\epsilon_1 \epsilon_2$, ktorý je malou veličinou druhého rádu. Presne toto sme chceli dostať! Znamená to, že pre malé kolísanie môžeme prítomnosť akéhokoľvek tangenciálneho zrýchlenia zanedbať. Lebo ak zmenšíme amplitúdu kolísania 10-krát, veľkosť a_{tan} sa zmenší 100-krát. Čiže tangenciálne zrýchlenie vymizne oveľa skôr ako kolísanie.

Vektory \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 elementárneho taniera sa teda pohybujú v podstate rovnomerným pohybom po kružniciach, ktorých roviny môžu zvierať malý uhol. Ako sme videli na Obr.4.2, vedie to k tomu, že vektor $\hat{\mathbf{x}}_3$ popisuje kužeľovú plochu, pričom ju popisuje s dvakrát vyššou frekvenciou, ako je frekvencia otáčania taniera.

4.3.9 Od elementárneho k skutočnému tanieru

Vráťme sa teraz od elementárneho taniera k skutočnému tanieru v tvare tenkého disku. Videli sme, že pre malé kolísanie sú zrýchlenia hmotných bodov elementárnych tanierov len radiálne. To znamená, že na každý hmotný bod pôsobí len radiálna (dostredivá) sila.

Môžeme si predstaviť, že skutočný tanier je zložený z obrovského množstva elementárnych tanierov, a teda že každá jeho častica sa pohybuje po svojej kružnici. Kružnice sú navzájom rôzne a ležia v mnohých odlišných rovinách. Pritom jednotlivé elementárne taniere, z ktorých je zložený skutočný

tanier, budú na seba pôsobiť len v radiálnom smere (čím budú v tanieri spôsobovať radiálne pnutie) a to tak, aby sa tvar taniera nemenil. Nebudú nijako rušivo ovplyvňovať svoje pohyby v tangenciálnom smere. Preto všetko, čo sme povedali o malom kolísaní elementárneho taniera, platí aj pre skutočný tanier.

Kapitola 5

Záver

Spomínam si, že som zašiel za Hansom Bethem a vravím mu: „Hej, Hans! Všimol som si niečo zaujímavé. Keď tanier rotuje takto, dôvod, prečo je to dve ku jednej, spočíva...“ a ukázal som mu zrýchlenia.

On na to: „Feynman, je to skutočne zaujímavé, ale čo je na tom také dôležité? Na čo to robíš?“ „Ha!“ hovorím mu. „Vôbec to nie je dôležité. Robím to len tak, z pasie.“ Jeho reakcia ma neodradila; zaumienil som si mať z fyziky radosť a robiť, čo sa mi zapáči.

— Richard Feynman, *To nemyslíte vážne, pán Feynman!*

Na záver zhrnieme, čo všetko sa nám v tejto práci podarilo dosiahnuť:

1. Vyhотовili sme videozáznam reálneho taniera vyhodeného do vzduchu. Na základe jeho analýzy sme ukázali, že Feynman sa mýli a že tanier sa v skutočnosti pri malom kolísaní otáča približne dvakrát pomalšie, ako sa kolíše (Kapitola 2).
2. Pomocou matematického aparátu teoretickej mechaniky sme odvodi-
li vzťah pre pomer frekvencií otáčania a kolísania pri malom kolísaní
taniera, ktorý potvrdil to, čo sme pozorovali na videozázname (Kapi-
tola 3).
3. Vytvorili sme počítačový model vyhodeného taniera (a niekoľkých ďal-
ších telies), pomocou ktorého sme objavili, že ak je kolísanie taniera
malé, jednotlivé častice taniera sa pohybujú po kružniciach so spo-
ločným stredom, ktoré však ležia vo všeobecnosti v rôznych rovinách
zvierajúcich malý uhol. Takýto pohyb častíc taniera automaticky ve-
die k tomu, že tanier sa kolíše s dvakrát väčšou frekvenciou, než s akou
sa otáča. Zároveň sa nám podarilo elementárnym spôsobom vysvetliť,

prečo sa častice taniera musia pohybovať po kružniciach. Našli sme tak veľmi pravdepodobne vysvetlenie pohybu taniera, o ktorom Feynman tvrdí, že si už nepamätá jeho detaily (Kapitola 4).

Splnili sme tak všetky ciele, ktoré sme si stanovili v úvode.

Všetko toto sme robili hlavne pre zábavu. Výsledkom našej práce nie sú prevratné objavy, ktoré zmenia svet. Jednoducho sme sa len po prečítaní knihy *To nemyslíte vážne, pán Feynman!* „nakazili“ od Feynmana a chceli sme si všetko vyskúšať a odvodiť. Už nám nestačilo iba to, že sme sa z knihy dozvedeli, že pomer frekvencií otáčania a kolísania taniera bol $2 : 1$. Chceli sme *sami* tento pomer pochopiť a nájsť jednoduché odvodenie, ktoré spomína Feynman. Povedali sme si: „Je to síce nepravdepodobné, ale keď na to prišiel Feynman, možno by sme na to mohli prísť aj my!“ Po počiatkových neúspechoch sme neraz boli v stavoch, keď sme si povedali, že to nezvládneme a končíme.

Ale potom, ako to v takých prípadoch už býva, jednoduché odvodenie akoby nám spadlo z neba. Možno sa zdá, že to je náhoda, ale podľa nás nie. Pretože človek, ktorý robí niečo so zanietením a chce na to stoj čo stoj prísť, myslí na to celý čas—keď raňajkuje, zaspáva, umýva si zuby. Hoci si niekedy aj povie, že už má toho dosť a viac na to nebude myslieť, jeho podvedomie sa nedá zastaviť a samo pokračuje v boji. Preto niet divu, že po určitom čase príde tá chvíľa, ktorá sa nedá opísať a pre ktorú stálo za to toľko premýšľať, keď vám zrazu skrsne v hlave tá správna myšlienka. Aj keď to, o čom ste premýšľali, nie je až také dôležité, ste spokojní, že ste to zvládli a že nie ste až takí nešikovní.

Pri tejto práci sme nadobudli veľké množstvo poznatkov z rôznych oblastí. Rozšírili sme si vedomosti z fyziky, konkrétne jednej jej časti, a to fyziky tuhého telesa. Až tu sme zistili, aká je táto časť fyziky zaujímavá. Prenikli sme do jej tajov omnoho hlbšie, pretože dosiaľ sme mali skúsenosti s popisom otáčania telies iba v rovine. Teraz sme sa však museli oboznámiť s popisom všeobecného otáčania telies v priestore. Bolo potrebné naštudovať si mnohé znalosti z oblasti objektovo orientovaného programovacieho jazyka *Java*, v ktorom sme vytvorili program simulujúci pohyb taniera, a naučiť sa spracúvať video na počítači. S našou prácou sme chceli oboznámiť aj ostatných ľudí, a to primeranou formou. Preto sme sa ju rozhodli napísať v sádzacom programe \LaTeX , aby forma textu zodpovedala štandardom odborných vedeckých článkov.¹

¹Najnovšiu verziu práce je možné stiahnuť z internetu z adresy `<http://www.vscience.host.sk/materialy/feynmanPlate/>`

Kapitola 6

Dodatky

6.1 Úryvok

Kvôli úplnosti uvádzame celý úryvok z Feynmanovej knihy *To nemyslíte vážne, pán Feynman!* v slovenskom preklade [1] a pre porovnanie aj v americkom origináli [2].

* * *

Potom ma napadlo ešte niečo: Z fyziky mi je teraz trochu nanič, ale kedysi som z nej mával *radosť*. Prečo? Pretože som sa s ňou *pohrával*. Robieval som hocičo, na čo som mal práve chuť netrápilo ma, či to má nejaký význam pre rozvoj jadrovej fyziky, ale či to je pre mňa natoľko zaujímavé a zábavné, že mi stojí za to sa s tým pohrať. Na strednej škole som si všimol, že prúd vody vytekajúcej z kohútika sa postupne zužuje, a bol som zvedavý, či by som vedel vypočítať, čím to je. Zistil som, že to nie je až také ťažké. *Nemusel* som sa tým zapodievať, pre budúcnosť vedy to nebolo dôležité; ktosi iný to už urobil predo mnou. Na tom nezáležalo: Vymýšľal som si úlohy a hral som sa s nimi pre vlastné potešenie.

Prijal som teda tento nový postoj. Teraz keď som na dne a nikdy nič poriadne nevykonám, mám toto dobré učiteľské miesto na univerzite a prácu, ktorú mám rád, a tak ako si pre radosť čítavam *Tisíc a jednu noc*, fyzika mi bude *hrou*, kedykoľvek sa mi zachce, a nebudem si lámať hlavu nad tým, či to má nejaký význam.

Asi o týždeň som bol v samoobslužnej reštaurácii a nejaký chlapík tam v bujarej nálade vyhodil do vzduchu tanier. Ako stúpал dohora, videl som, že sa chveje, a všimol som si, že červený cornellský emblém, ktorým bol označený, sa rýchlo krúti. Bolo mi jasné, že sa otáčal vyššou frekvenciou, ako bola frekvencia chvenia.

Nemal som čo robiť, a tak som začal rátať pohyb rotujúceho taniera. Zistil som, že ak je uhol veľmi malý, emblémik sa otáča dvakrát rýchlejšie, ako je frekvencia chvenia — dve ku jednej. Vyšlo to zo zložitej rovnice! Potom

som si pomyslel: „Neexistuje jednoduchší spôsob, ako prísť na to, prečo je to jedna ku dvom? Čo keby som tak preštudoval pôsobiace sily alebo celú dynamiku?“

Už si nepamätám, ako som na to šiel, ale nakoniec som sa dopracoval k tomu, ako vyzerá pohyb hmotných častíc a ako sa všetky zrýchlenia vyrovnávajú tak, že to vyjde jedna ku dvom. Spomínam si, že som zašiel za Hansom Bethem a vravím mu: „Hej, Hans! Všimol som si niečo zaujímavé. Keď tanier rotuje takto, dôvod, prečo je to dve ku jednej, spočíva...“ a ukázal som mu zrýchlenia. On na to: „Feynman, je to skutočne zaujímavé, ale čo je na tom také dôležité? Na čo to robíš?“ „Ha!“ hovorím mu. „Vôbec to nie je dôležité. Robím to len tak, z pasie.“ Jeho reakcia ma neodradila; zaumienil som si mať z fyziky radosť a robiť, čo sa mi zapáči.

Pracoval som ďalej na rovniciach opisujúcich chvenie. Potom som uvažoval o tom, ako sa v relativite začínajú pohybovať elektrónové orbity. Ďalej to bola Diracova rovnica v elektrodynamike. A napokon kvantová elektrodynamika. Ani som nezbadal ako (trvalo to naozaj veľmi krátko), a už som sa „hral“ — pracoval, skutočne — s tými istými starými problémami, ktoré som mal tak rád a ktoré som nechal tak, keď som odišiel do Los Alamos; podobné, aké som riešil vo svojej dizertačnej práci — všetky tie staručké, nádherné veci.

Išlo to ľahko. Nestálo ma to žiadnu námahu. Bolo to, ako keď odštopľujete fľašu: Všetko vytekalo samo. Takmer som sa pokúsil tomu vzdorovať! Nebolo dôležité, čomu som sa venoval, ale v končnom dôsledku to predsa len svoj význam malo. Diagramy a všetko to, za čo som dostal Nobelovu cenu, vzišlo z toho prplania okolo chvejúceho sa taniera.

* * *

Then I had another thought: Physics disgusts me a little bit now, but I used to *enjoy* doing physics. Why did I enjoy it? I used to *play* with it. I used to do whatever I felt like doing – it didn't have to do with whether it was important for the development of nuclear physics, but whether it was interesting and amusing for me to play with. When I was in high school, I'd see water running out of a faucet growing narrower, and wonder if I could figure out what determines that curve. I found it was rather easy to do. I didn't *have* to do it; it wasn't important for the future of science; somebody else had already done it. That didn't make any difference. I'd invent things and play with things for my own entertainment.

So I got this new attitude. Now that I *am* burned out and I'll never accomplish anything, I've got this nice position at the university teaching classes which I rather enjoy, and just like I read the *Arabian Nights* for pleasure, I'm going to *play* with physics, whenever I want to, without worrying about any importance whatsoever.

Within a week I was in the cafeteria and some guy, fooling around, throws a plate in the air. As the plate went up in the air I saw it wobble, and I noticed

the red medallion of Cornell on the plate going around. It was pretty obvious to me that the medallion went around faster than the wobbling.

I had nothing to do, so I start to figure out the motion of the rotating plate. I discover that when the angle is very slight, the medallion rotates twice as fast as the wobble rate – two to one. It came out of a complicated equation! Then I thought, "Is there some way I can see in a more fundamental way, by looking at the forces or the dynamics, why it's two to one?" I don't remember how I did it, but I ultimately worked out what the motion of the mass particles is, and how all the accelerations balance to make it come out two to one.

I still remember going to Hans Bethe and saying, "Hey, Hans! I noticed something interesting. Here the plate goes around so, and the reason it's two to one is ..." and I showed him the accelerations.

He says, "Feynman, that's pretty interesting, but what's the importance of it? Why are you doing it?" "Hah!" I say. "There's no importance whatsoever. I'm just doing it for the fun of it." His reaction didn't discourage me; I had made up my mind I was going to enjoy physics and do whatever I liked.

I went on to work out equations of wobbles. Then I thought about how electron orbits start to move in relativity. Then there's the Dirac Equation in electrodynamics. And then quantum electrodynamics. And before I knew it (it was a very short time) I was "playing" – working, really – with the same old problem that I loved so much, that I had stopped working on when I went to Los Alamos: my thesis-type problems; all those old-fashioned, wonderful things.

It was effortless. It was easy to play with these things. It was like uncorking a bottle: Everything flowed out effortlessly. I almost tried to resist it! There was no importance to what I was doing, but ultimately there was. The diagrams and the whole business that I got the Nobel Prize for came from that piddling around with the wobbling plate.

6.2 Odvodenie vzťahu medzi \mathbf{L} a $\boldsymbol{\omega}$

Moment hybnosti tuhého telesa určíme z predpokladu, že teleso sa skladá z obrovského počtu malých častíc. Pre moment hybnosti jednej takejto častice voči nejakému pevnému bodu platí:

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{r}_i \times (m_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$$

Moment hybnosti celého telesa je súčtom momentov hybností všetkých častíc

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$$

V tejto sume sa vyskytujú výrazy $\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$. Index i pri polohovom vektore kvôli prehľadnosti nepíšeme. Výraz $\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ teraz zjednodušíme. Najprv vypočítame vektorový súčin $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_2 z - \omega_3 y) \hat{\mathbf{x}} + (\omega_3 x - \omega_1 z) \hat{\mathbf{y}} + (\omega_1 y - \omega_2 x) \hat{\mathbf{z}}$$

Dosadíme do výrazu $\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ a získame:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ x & y & z \\ (\omega_2 z - \omega_3 y) & (\omega_3 x - \omega_1 z) & (\omega_1 y - \omega_2 x) \end{vmatrix} = \\ &= (\omega_1(y^2 + z^2) - \omega_2 xy - \omega_3 zx) \hat{\mathbf{x}} + \\ &+ (\omega_2(z^2 + x^2) - \omega_3 yz - \omega_1 xy) \hat{\mathbf{y}} + \\ &+ (\omega_3(x^2 + y^2) - \omega_1 zx + \omega_2 yz) \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Teraz nám už nič nebráni, aby sme sa vrátili k sume a zapísali vzťah pre celkový moment hybnosti \mathbf{L} . Vidíme, že každý z výrazov pod sumou je na tri riadky. Preto použijeme praktickejší maticový zápis:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i z_i x_i \\ -\sum_i m_i x_i y_i & \sum_i m_i(z_i^2 + x_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i y_i z_i & \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \tag{6.1}$$

Čo sme to vlastne dostali? Maticu \mathbf{I} nazývame tenzorom momentu zotrvačnosti. Vyzerá odstrašujúco, ale ak si zvolíme *vhodnú*¹ súradnicovú sústavu, všetky prvky tejto matice okrem tých, ktoré ležia na diagonále, budú nulové, čím sa matica náramne zjednoduší:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Moment hybnosti môžeme v takýchto prípadoch zapísať takto:

$$\mathbf{L} = I_{xx} \omega_x \hat{\mathbf{x}} + I_{yy} \omega_y \hat{\mathbf{y}} + I_{zz} \omega_z \hat{\mathbf{z}} \tag{6.2}$$

¹Konkrétne, ak si tanier predstavíme kvôli jednoduchosti ako veľmi tenký homogénny disk s hmotnosťou m a polomerom R ležiaci v rovine xy tak, že jeho stred spľýva s počiatkom sústavy súradníc, môžeme jednoduchou integráciou ukázať, že tenzor momentu zotrvačnosti takého taniera má tvar

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{pmatrix}$$

6.3 Eulerove rovnice

Odvodíme tu Eulerove rovnice, ktoré sú veľmi užitočné pri popise dynamiky tuhého telesa a ktoré nám umožnia určiť, ako sa pohybujú vektory $\boldsymbol{\omega}$ a \mathbf{L} v sústave tuhého telesa. Budeme predpokladať, že tuhé teleso je umiestnené v sústave tuhého telesa s jednotkovými vektormi $\hat{\mathbf{x}}_1$, $\hat{\mathbf{x}}_2$ a $\hat{\mathbf{x}}_3$ tak, že tenzor momentu zotrvačnosti má len uhlopriečne zložky. Vyjdeme zo vzťahu pre moment hybnosti 6.2 zapísaného pre sústavu telesa

$$\mathbf{L} = I_1\omega_1\hat{\mathbf{x}}_1 + I_2\omega_2\hat{\mathbf{x}}_2 + I_3\omega_3\hat{\mathbf{x}}_3$$

a základnej dynamickej rovnice tuhého telesa, ktorú tiež zapíšeme v tejto sústave

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (I_1\omega_1\hat{\mathbf{x}}_1 + I_2\omega_2\hat{\mathbf{x}}_2 + I_3\omega_3\hat{\mathbf{x}}_3)$$

Treba si tu všimnúť, že derivácia sa vzťahuje aj na jednotkové vektory $\hat{\mathbf{x}}_1$, $\hat{\mathbf{x}}_2$ a $\hat{\mathbf{x}}_3$, ktoré sa menia s časom. Preto bude mať derivovaný výraz až šesť členov:

$$\boldsymbol{\tau} = I_1 \frac{d\omega_1}{dt} \hat{\mathbf{x}}_1 + I_1\omega_1 \frac{d\hat{\mathbf{x}}_1}{dt} + I_2 \frac{d\omega_2}{dt} \hat{\mathbf{x}}_2 + I_2\omega_2 \frac{d\hat{\mathbf{x}}_2}{dt} + I_3 \frac{d\omega_3}{dt} \hat{\mathbf{x}}_3 + I_3\omega_3 \frac{d\hat{\mathbf{x}}_3}{dt} \quad (6.3)$$

Teraz odvodíme jednotlivé derivácie vektorov $\hat{\mathbf{x}}_1$, $\hat{\mathbf{x}}_2$, $\hat{\mathbf{x}}_3$ podľa času. Najprv budeme derivovať vektor $\hat{\mathbf{x}}_1$. Keďže vektor $\hat{\mathbf{x}}_1$ je pevne spojený s rotujúcim telesom, možno jeho deriváciu (rýchlosť jeho koncového bodu) vyjadriť podľa vzťahu 3.13 ako

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}_1}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega_3\hat{\mathbf{x}}_2 - \omega_2\hat{\mathbf{x}}_3$$

Podobne možno vyjadriť derivácie zvyšných dvoch vektorov

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}_2}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{x}}_2 = -\omega_3\hat{\mathbf{x}}_1 + \omega_1\hat{\mathbf{x}}_3$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}_3}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{x}}_3 = \omega_2\hat{\mathbf{x}}_1 - \omega_1\hat{\mathbf{x}}_2$$

Teraz sa opäť vrátime k rovnici 6.3 a dosadíme do nej nami vyjadrené derivácie, pričom využijeme, že vektor momentu sily môžeme rozložiť v súradnicovej sústave tuhého telesa na zložky:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \tau_1\hat{\mathbf{x}}_1 + \tau_2\hat{\mathbf{x}}_2 + \tau_3\hat{\mathbf{x}}_3 = \\ &= I_1\dot{\omega}_1\hat{\mathbf{x}}_1 + I_1\omega_1\omega_3\hat{\mathbf{x}}_2 - I_1\omega_1\omega_2\hat{\mathbf{x}}_3 + \\ &\quad + I_2\dot{\omega}_2\hat{\mathbf{x}}_2 - I_2\omega_2\omega_3\hat{\mathbf{x}}_1 + I_2\omega_2\omega_1\hat{\mathbf{x}}_3 + \\ &\quad + I_3\dot{\omega}_3\hat{\mathbf{x}}_3 + I_3\omega_3\omega_2\hat{\mathbf{x}}_1 - I_3\omega_3\omega_1\hat{\mathbf{x}}_2 = \\ &= (I_1\dot{\omega}_1 + I_3\omega_2\omega_3 - I_2\omega_2\omega_3)\hat{\mathbf{x}}_1 + \\ &\quad + (I_2\dot{\omega}_2 + I_1\omega_1\omega_3 - I_3\omega_1\omega_3)\hat{\mathbf{x}}_2 + \\ &\quad + (I_3\dot{\omega}_3 + I_2\omega_1\omega_2 - I_1\omega_1\omega_2)\hat{\mathbf{x}}_3 \end{aligned}$$

Ak sa dva vektory na pravej a ľavej strane rovnice majú rovnať, musia mať rovnaké zložky a preto musí platiť:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_3 \omega_2 \\ \tau_2 &= I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 \\ \tau_3 &= I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1\end{aligned}$$

Posledné tri rovnice sú *Eulerove rovnice*, ktoré určujú dynamiku tuhého telesa v sústave tuhého telesa.

6.4 Eulerove uhly

Eulerove uhly sa používajú na popis otočenia telesa v priestore. Postupným otáčaním telesa o tri Eulerove uhly okolo istých osí môžeme teleso dostať do ľubovoľnej polohy.

Nech sústava S s osami $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ a $\hat{\mathbf{z}}$ je sústava pevne spojená s laboratóriom a sústava S' s osami $\hat{\mathbf{x}}_1$, $\hat{\mathbf{x}}_2$ a $\hat{\mathbf{x}}_3$ je pevne spojená s telesom.

Začneme zo stavu, keď sa Eulerove uhly θ , ϕ a ψ rovnajú všetky nule a sústavy S a S' sú totožné (Obr. 6.1).

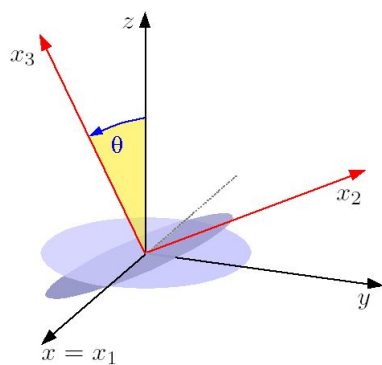
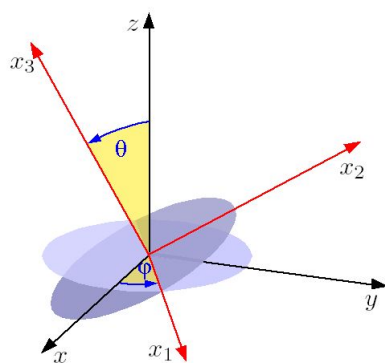
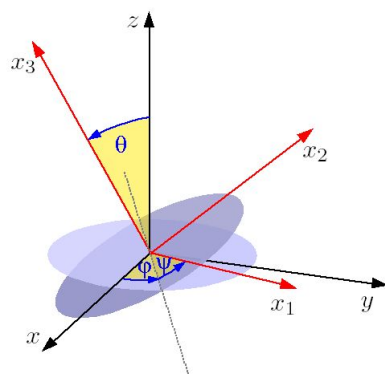
Najprv otočíme sústavu S' o uhol θ okolo osi $\hat{\mathbf{x}}_1$, potom o uhol ϕ okolo osi $\hat{\mathbf{z}}$ a nakoniec o uhol ψ okolo osi $\hat{\mathbf{x}}_3$. Takto môžeme teleso natočiť ľubovoľným spôsobom. Každému natočeniu v priestore zodpovedá jediná trojica uhlov θ , ϕ a ψ .

6.5 Pohybové rovnice taniera

Pri simulácii program využíva sústavu nasledujúcich diferenciálnych rovníc [5, s. VIII-31], ktorú potom rieši metódou dynamického modelovania.²

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \frac{[(I - I_3) \dot{\phi} \cos \theta - I_3 \dot{\psi}] \dot{\phi} \sin \theta}{I} \\ \ddot{\phi} &= \frac{[I_3 \dot{\psi} - (2I - I_3) \dot{\phi} \cos \theta] \dot{\theta}}{I \sin \theta} \\ \ddot{\psi} &= \frac{[I \sin^2 \theta + (2I - I_3) \dot{\phi} \cos^2 \theta - I_3 \dot{\psi} \cos \theta] \dot{\theta}}{I \sin \theta}\end{aligned}$$

²Metódu dynamického modelovania prvýkrát pre didaktické ciele zaviedol práve Richard Feynman vo svojich *Feynmanových prednáškach z fyziky* [4, s. 171-180]. Metóda použitá v našom applete a implementovaná v balíku *Open Source Physics* je však oproti Feynmanovej metóde o dva rády presnejšia. Je to Rungeho-Kuttova metóda RK45.

(a) Najprv otočíme okolo osi $\hat{\mathbf{x}}_1$ o $\theta \dots$ (b) \dots potom okolo osi $\hat{\mathbf{z}}$ o uhol $\phi \dots$ (c) \dots a nakoniec o uhol ψ okolo $\hat{\mathbf{x}}_3$.

Obrázok 6.1: Eulerove uhly.

Literatúra

- [1] Feynman, R., Leighton, R.: *To nemyslíte vážne, pán Feynman!* Bratislava: Obzor 1990, s. 164-165.
- [2] Feynman, R., Leighton, R.: *Surely you're joking, Mr. Feynman!* New York: W. W. Norton & Company 1985, s. 173-174. Úryvok je dostupný tiež na internete na url <<http://www.swcp.com/pcaskey/feynman.html>>
- [3] Neznámy autor [online]. <<http://www.navworld.com/newsletters/issue2.htm>>
- [4] Feynman, R., Leighton, R., Sands, M.: *Feynmanove prednášky z fyziky, 1. diel.* Bratislava: Alfa 1986.
- [5] Morin, D.: *There Once Was a Classical Theory: Introductory Classical Mechanics with Problems and Solutions* [online]. Dostupné na internete vo formáte pdf: <http://www.courses.fas.harvard.edu/_phys16/Textbook>.
- [6] Christian, W. et. al.: *Open Source Physics Project* [online]. Stránky projektu, z ktorých sa dajú stiahnuť knižnice Open Source Physics dostupné na <<http://www.opensourcephysics.org>>